Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

SUPERFICI MINIME

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alberto Parmeggiani

Presentata da:
Linda Giampieretti

III **Sessione**
Anno Accademico 2011-2012

Alla mia famiglia...

Introduzione

In geometria differenziale si definisce superficie minima una superficie che ha curvatura media uguale a zero in ogni punto. Il problema di determinare enti geometrici che minimizzano lunghezze o aree è antico. Già dall'antichità si sapeva che la linea più corta che unisce due punti nello spazio è la linea retta e che la superficie di un piano delimitata da una qualunque curva chiusa piana ha area minima tra tutte le possibili porzioni d'area nello spazio che hanno la data curva come frontiera.
Con il passare dei secoli si è giunti a considerare problemi sempre più complessi di area minima tra più curve chiuse nello spazio o tra curve non piane che si autointersecano.

Occorre osservare che la definizione di superficie minima tramite la curvatura media nulla rende critico il funzionale dell'area, ma non lo minimizza in generale (ciò è vero solo localmente). D'altra parte, come si vedrà in questa tesi, se una porzione di superficie con bordo dato minimizza l'area allora essa deve essere una superficie minima. (Ed in generale una superficie minima è sempre localmente area minimizzante).

Le superfici minime sono tra quelle meglio studiate in geometria differenziale. Fu Lagrange ad iniziare nel 1760-1761 lo studio sistematico delle superfici minime come applicazione dei suoi studi nel calcolo delle variazioni. Monge, Meusnier, Legendre, Bonnet, Riemann e Lie contribuirono alla teoria. Meusnier scoprì le due superfici minime elementari: l'elicoide retta e la catenoide. Karl Weierstrass e H. Schwartz svilupparono la relazione tra la teoria delle funzioni olomorfe in una variabile complessa e la teoria delle superfici minime reali. Altri numerosi matematici illustri contribuirono in seguito allo sviluppo della teoria.

Nella teoria della capillarità l'importanza delle superfici minime come le superfici che minimizzano l'energia potenziale di superficie fu messa in risalto dagli esperimenti di Plateau nel 1873. Plateau scoprì che immergendo un filo sagomato secondo una curva chiusa dello spazio in una soluzione saponata si otteneva una lamina di sapone che realizzava una superficie minima. Da qui il problema di Plateau: determinare le superfici minime che hanno come bordo una data curva chiusa.

L'ambito di applicazione delle superfici minime si è rivelato essere vastissimo, dalla biologia all'ingegneria ed architettura strutturale.

Lo scopo di questa tesi è arrivare a definire le condizioni che caratterizzano le superfici minime di $\mathbb{R}^3$ ed in particolare quelle superfici che realizzano l'area minima dato un bordo fissato. Svilupperemo due casi parallelamente. Da una parte, data una superficie in forma parametrica di $\mathbb{R}^3$, vedremo come il funzionale d'area di una porzione regolare Σ_Γ avente come bordo una curva chiusa fissata Γ abbia un punto critico in Σ_Γ se e solo se quest'ultima è una superficie minima. Dall'altra faremo lo stesso nel caso in cui ci è data una superficie con struttura di grafico in $\mathbb{R}^3$: in questo caso si otterrà che la condizione di superficie minima implica un sistema alle derivate parziali in forma di divergenza per il gradiente della funzione f che definisce il grafico, estremamente utile per studiare le proprietà delle soluzioni dell'equazione di superficie minima.

Nel primo capitolo daremo una definizione di superfici parametriche in $\mathbb{R}^3$ e di tutti gli elementi utili al loro studio; analogamente faremo per le superfici in forma di grafico. Vedremo come ottenere due superfici parametriche equivalenti attraverso un cambiamento di parametro e le relazioni che le legano.

Nel secondo capitolo vedremo come costruire variazioni di una superficie parametrica regolare con bordo fissato, introducendo una variazione sulle tre coordinate. Lo scopo di tale capitolo è mostrare come la variazione si rifletta nel calcolo delle aree, per poi arrivare ad una formula finale che caratterizza le superfici minime.

Il terzo capitolo sarà analogo al secondo, ma dal punto di vista delle superfici con struttura di grafico in $\mathbb{R}^3$. Qui si otterrà il sistema alle derivate partiaziali in forma di divergenza al quale abbiamo accennato più sopra.

Nel quarto capitolo illustreremo i due esempi classici di superfici minime regolari: l'elicoide e la catenoide. Date le loro parametrizzazioni, calcoleremo la curvatura media per verificare che si annulla in ogni punto.

Nell'esposizione abbiamo seguito i testi riportati nella bibliografia.

Indice

Capitolo 1

Superfici

In questo capitolo definiremo le superfici in forma parametrica di $\mathbb{R}^3$ e ne mostreremo le principali proprietà, per poi considerare il caso particolare delle superfici di $\mathbb{R}^3$ date in forma di grafico.

1.1 Superfici in forma parametrica

In questa sezione daremo la definizione di superfici parametriche e ne evidenzieremo alcuni aspetti importanti, utili allo studio delle superfici minime.

Definizione 1.1 (Superficie in forma parametrica)**.** Una *superficie in forma parametrica* S è l'insieme dei punti descritti da una mappa differenziabile $x\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2) \longmapsto x(u) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ almeno C^1 dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio (aperto connesso) del piano delle u. In particolare $S = x(D)$. Useremo la notazione (S, x) per indicare l'insieme geometrico dello spazio e la sua parametrizzazione. Inoltre diremo che $S \in C^r$ se $x \in C^r$ (r intero positivo).

Lemma 1.1.1 (Proprietà equivalenti di (S, x))**.** *Data la superficie in forma parametrica (S, x), le seguenti condizioni sono equivalenti in ogni $u \in D$:*

- $\dfrac{\partial x}{\partial u_1} := \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}, \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}, \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^t$ *e* $\dfrac{\partial x}{\partial u_2} := \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}, \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2}, \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2}\right)^t$ *sono linearmente indipendenti;*

- $\dfrac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \neq 0$ *(dove $\wedge$ indica il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$);*

- $\operatorname{rank}(J_x) = 2$*, dove* $J_x = \left[\dfrac{\partial x}{\partial u_1} \Big| \dfrac{\partial x}{\partial u_2}\right]$ *è la matrice Jacobiana della mappa x;*

- $\det(G) > 0$*, dove* $G = J_x^t J_x = \begin{bmatrix} \langle \dfrac{\partial x}{\partial u_1}, \dfrac{\partial x}{\partial u_1} \rangle & \langle \dfrac{\partial x}{\partial u_1}, \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \rangle \\ \langle \dfrac{\partial x}{\partial u_2}, \dfrac{\partial x}{\partial u_1} \rangle & \langle \dfrac{\partial x}{\partial u_2}, \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \rangle \end{bmatrix}$.

Dimostrazione. Il lemma si dimostra immediatamente utilizzando l'identità di Lagrange $\det(G) = \left\| \dfrac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\dfrac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \right)^2$ e le proprietà del rango.

□

Definizione 1.2 (Superficie regolare)**.** Data una superficie in forma parametrica (S, x) si dice che essa è *regolare* se la mappa x è definita su un dominio che contiene la chiusura $\bar{D}$ di D, è ivi iniettiva, e se in tutti i punti $u \in D$ valgono le proprietà equivalenti del Lemma 1.1.1.

Per ogni superficie (S, x) regolare possiamo determinare in ogni suo punto $p = x(u)$:

- lo spazio tangente T_pS di S in p;

- il vettore normale unitario esterno
$$N(u) = N_x(u) = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial x}{\partial u_2}}{\left\| \dfrac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \right\|};$$

- la prima forma fondamentale e la matrice dei coefficienti della prima forma fondamentale;

- l'area;

- la seconda forma fondamentale;
- le curvature principali;
- la curvatura di Gauss e la curvatura media.

Abbiamo infatti le seguenti definizioni.

Definizione 1.3 (Spazio tangente)**.** Lo spazio tangente alla superficie (S, x) regolare in un suo punto $p = x(u)$ è il sottospazio vettoriale bidimensionale di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$T_pS = \left\{ w = \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1}(u) + \lambda_2 \frac{\partial x}{\partial u_2}(u) \in \mathbb{R}^3; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = J_x(u)\mathbb{R}^2.$$

Definizione 1.4 (Prima forma fondamentale)**.** Sia (S, x) una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ e sia $p = x(u) \in S$ un suo punto. La *prima forma fondamentale* di S nel punto p è la forma quadratica su T_pS definita da $\mathrm{I}_p \colon T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$, $w \longmapsto \mathrm{I}_p(w) = \|w\|^2$ dove $\|w\|$ è la norma euclidea di w in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 1.5 (Coefficienti di Gauss della prima forma fondamentale e relativa matrice)**.** Data una superficie (S, x) regolare e dato $p = x(u) \in S$, i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da:

$$g_{11} = \left\| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\|^2, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle, \quad g_{22} = \left\| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\|^2.$$

La matrice G dei coefficienti della prima forma fondamentale è dunque la matrice

$$G = J_x^t J_x = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Per il determinante di G abbiamo:

$$\det(G) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \left\| \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\|^2.$$

Definizione 1.6 (Area)**.** Sia (S, x) una superficie regolare in forma parametrica. Sia $I \subset \bar{I} \subset D$ un sottodominio limitato e sia $\Sigma = x(I)$. Definiamo l'area $\mathcal{A}(\Sigma)$ di Σ l'integrale

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_I \sqrt{\det G} \quad du_1 du_2 = \iint_\Sigma d\mathcal{A}$$

Data la superficie regolare (S, x), consideriamo la matrice simmetrica $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$, le cui entrate in ogni $u \in D$ sono definite da $b_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, N \right\rangle$. Con $p = x(u)$ e $w \in T_pS$ della forma $w = w_1 \frac{\partial x}{\partial u_1}(u) + w_2 \frac{\partial x}{\partial u_2}(u)$, consideriamo la

forma quadratica $II_p \colon T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$ su T_pS, definita da

$$II_p(w) = \left\langle B(u) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Definizione 1.7. La forma quadratica II_p è chiamata *seconda forma fondamentale* di S in p.

Definizione 1.8 (Curvature principali)**.** Le *curvature principali* $k_\pm(p)$ di S in $p = x(u)$ sono rispettivamente

$$k_+(u) = \max\{II_p(w);\ I_p(w) = 1\}, \quad k_-(u) = \min\{II_p(w);\ I_p(w) = 1\}$$

Definizione 1.9 (Curvatura di Gauss e curvatura media)**.**

$$K(u) = k_+(u)k_-(u), \ \textit{curvatura di Gauss di } S \textit{ in } p = x(u),$$

$$H(u) = \frac{1}{2}(k_+(u) + k_-(u)), \ \textit{curvatura media di } S \textit{ in } p = x(u).$$

Lemma 1.1.2. *La curvatura media si esprime in funzione dei coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale. Si ha infatti che*

$$H(u) = \frac{g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12}}{2 \det g_{ij}}. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Poiché $G > 0$ e B è simmetrica, esse sono simultaneamente diagonalizzabili.

Scriviamo dunque I_p e II_p usando le coordinate che diagonalizzano B e G e risolviamo, tramite il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, il problema che fornisce $k_{\pm}(u)$. Si ottiene che $k_{\pm}(u)$ sono gli autovalori della matrice $G^{-1}B$, per cui $H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(G^{-1}B)$ da cui si ottiene la relazione voluta. □

1.2 Cambiamento di parametro

In questa sezione vedremo come operare un cambiamento di parametro nel caso di una superficie (S, x) dove $S \in C^r$, ovvero come ottenere una superficie *equivalente* a quella iniziale descritta in funzione di nuovi parametri.

Definizione 1.10 (Cambio di parametro)**.** Una superficie (S, x) di classe C^r è detta essere *equivalente alla superficie in forma parametrica* $(S, \tilde{x})$, dove $\tilde{x} \colon \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è di classe C^r, se esiste un diffeomorfismo $U \colon \tilde{D} \longrightarrow D$ di classe C^r tale che

$$x \circ U = \tilde{x}.$$

U è detto *cambiamento di parametro.*

Indichiamo con J_U la matrice Jacobiana del cambiamento di parametro. Se $(S, \tilde{x})$ è equivalente a (S, x) si ha:

- per la matrice Jacobiana $J_{\tilde{x}}$ vale la relazione $J_{\tilde{x}} = J_x J_U$;
- dunque lo spazio tangente in un punto è lo stesso ma descritto in maniera differente, il che prova che esso è indipendente dalla parametrizzazione;
- le matrici G e $\tilde{G}$ della prima forma fondamentale descritte rispettivamente tramite x e $\tilde{x}$ sono legate dalla formula $\tilde{G} = J_U^t G J_U$, da cui segue che $\det \tilde{G} = \det G (\det J_U)^2$;
- invarianza dell'area: se $\Sigma = x(I) = \tilde{x}(\tilde{I})$, dove $I \subset \bar{I} \subset D$ è un sottodominio limitato di D e $\tilde{I} = U^{-1}(I)$ allora
$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_I \sqrt{\det G} \quad du_1 du_2 = \iint_{\tilde{I}} \sqrt{\det \tilde{G}} \quad d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2.$$

- se il cambiamento di parametro U è tale che $\det J_U > 0$, allora per i vettori normali unitari esterni $N(u)$ e $\tilde{N}(\tilde{u})$ vale che $N(U(\tilde{u})) = \tilde{N}(\tilde{u})$ per ogni $\tilde{u} \in \tilde{D}$, il che permette di definire per queste classi di superfici equivalenti la *mappa di Gauss* $\nu \colon S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ (la sfera unitaria centrata nell'origine di $\mathbb{R}^3$);
- se U è un cambiamento di parametro come nel punto precedente allora per le matrici B e $\tilde{B}$ vale la relazione $\tilde{B} = J_U^t B J_U$, ed in particolare la seconda forma fondamentale dipende solo dalla scelta di N.

1.3 Superfici in forma di grafico

In questa sezione vedremo come una superficie regolare possa essere descritta in forma di grafico. Successivamente analizzeremo alcune proprietà importanti utili allo studio di tali superfici.

Definizione 1.11 (Superfici in forma di grafico)**.** Un insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è detto essere una *superficie in forma di grafico* se è possibile descrivere S tramite una parametrizzazione $x \colon D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $D \subset \mathbb{R}^2_{x_j, x_k}$ dove $j, k \in \{1, 2, 3\}$ e $j < k$, $x(D) = S$ e se $\ell \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j, k\}$, si ha

$$x_\ell = f(x_j, x_k).$$

Diremo che S è in forma di grafico rispetto ad x_3 (o anche x_3-grafico) se $\ell = 3$ e quindi se $x \colon D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è della forma

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2, f(x_1, x_2)).$$

Lemma 1.3.1 (Esistenza locale del grafico)**.** *Sia data (S, x) regolare. Per ogni $a \in D$ esiste un intorno $I_a \subset D$ di a tale che $x(I_a) \subset S$ è in forma di grafico.*

Dimostrazione. In virtù delle proprietà equivalenti del Lemma 1.1.1, valide in a, si ha che esiste un intorno I_a di a tale che

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2}(u) \neq 0, \quad \forall u \in I_a.$$

Esistono allora $j, k \in \{1, 2, 3\}$ tali che

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_j}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_j}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_k}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_k}{\partial u_2} \end{bmatrix} (u) \neq 0, \quad \forall u \in I_a,$$

a patto di ristringere I_a se necessario. Per il Teorema dell'invertibilità locale sappiamo che, a patto di restringere ancora I_a, la mappa

$$F \colon I_a \ni (u_1, u_2) \longmapsto (x_j, x_k) \in F(I_a) \subset \mathbb{R}^2_{x_j, x_k}$$

è un diffeomorfismo di classe C^1. Per fissare le idee possiamo supporre $j = 1$ e $k = 2$ (ciò non è restrittivo) e quindi $x_3 = x_3(u_1, u_2) = x_3(F^{-1}(x_1, x_2)) =: f(x_1, x_2)$ per ogni $(x_1, x_2) \in F(I_a)$. Siccome

$$\Big\{ \Big(x_1, x_2, f(x_1, x_2)\Big);\ (x_1, x_2) \in F(I_a) \Big\} = \{x(u);\ u \in I_a\} \subset S,$$

abbiamo così ottenuto una riparametrizzazione di una porzione di S in forma di grafico, e ciò conclude la dimostrazione. □

Per ogni superficie S in forma di x_3-grafico, analogamente ai casi precedenti, possiamo determinare:

- la matrice Jacobiana, $J_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$;
- lo spazio tangente in un punto, con base data dai vettori
  $$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix} \text{ e } \frac{\partial x}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix};$$
- la prima forma fondamentale;
- i coefficienti di Gauss della prima forma fondamentale
  $$g_{11} = \left\| \frac{\partial x}{\partial x_1} \right\|^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial x_1} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$g_{22} = \left\| \frac{\partial x}{\partial x_2} \right\|^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2$$

e la relativa matrice

$$G = J_x^t J_x = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix};$$

- l'area: se $\Sigma = x(I)$ si ha

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_I \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}_{x_1,x_2} f\|^2}\ dx_1 dx_2;$$

- la seconda forma fondamentale: essendo

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\mathrm{grad}_{x_1,x_2} f\|^2}} \begin{bmatrix} -f'_{x_1} \\ -f'_{x_2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

i coefficienti della matrice B della seconda forma fondamentale sono

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\mathrm{grad}_{x_1,x_2} f\|^2}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j};$$

- le curvature principali, la curvatura di Gauss

$$K = \det B / \det G = \frac{f''_{x_1x_1} f''_{x_2x_2} - (f''_{x_1x_2})^2}{(1 + \|\mathrm{grad}_{x_1,x_2} f\|^2)^2},$$

e la curvatura media

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(G^{-1}B) = \frac{1}{2} \frac{(1 + (f'_{x_2})^2) f''_{x_1x_1} + (1 + (f'_{x_1})^2) f''_{x_2x_2} - 2 f'_{x_1} f'_{x_2} f''_{x_1x_2}}{(1 + \|\mathrm{grad}_{x_1,x_2} f\|^2)^{3/2}}.$$

Capitolo 2

Superfici minime: caso parametrico

In questo capitolo daremo la definizione di superficie minima da un punto di vista parametrico. In seguito presenteremo il relativo problema variazionale per minimizzare una data porzione di una superficie regolare.

2.1 Definizione

Definizione 2.1 (Superficie minima: caso parametrico)**.** Data una superficie regolare (S, x) diremo che S è una *superficie minima* se la curvatura media $H(u)$ si annulla in ogni punto di S, cioè se vale

$$H(u) = 0 \quad \forall u \in D.$$

Considerando la relazione (1.2) che lega la prima e la seconda forma fondamentale possiamo dire che

$$H(u) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} = 0$$

Vogliamo mettere in relazione la condizione di curvatura media nulla con la proprietà di punto critico del funzionale area. In particolare siamo interessati a proprietà di minimo dell'area. Consideriamo una superficie regolare (S, x) ed in essa fissiamo una curva chiusa semplice Γ, che delimita una certa porzione Σ_Γ di S. Questa avrà area minima se ogni altra porzione di superficie costruita sopra il bordo Γ ha area che risulta maggiore o uguale a quella considerata.

Illustriamo questo concetto con precisione.

Sia (S, x) una superficie regolare di classe almeno C^2 e su essa fissiamo una curva (regolare) $\Gamma \subset S$ semplice e chiusa ottenuta nel modo seguente: consideriamo un dominio limitato $\Delta \subset \bar{D} \subset D$ il cui bordo $\partial\Delta$ sia realizzato da una curva chiusa, semplice e regolare, e poniamo $\Gamma = x(\partial\Delta)$.

Ovviamente la porzione $\Sigma_\Gamma = x(\Delta)$ di S sopra Δ è anch'essa regolare. Consideriamo ora una famiglia di superfici (S_λ, x_λ), $\lambda \in \Lambda$ (famiglia di parametri), tali che le mappe x_λ, $\lambda \in \Lambda$, siano tutte definite in uno stesso intorno limitato della chiusura $\bar{\Delta}$ di Δ, contenuto in D e tali che coincidano tutte sul bordo $\partial\Delta$.

Ponendo $\Sigma_\Gamma^\lambda = x_\lambda(\Delta)$, se Σ_Γ ha area minima dovrà essere

$$\mathcal{A}(\Sigma_\Gamma) \leq \mathcal{A}(\Sigma_\Gamma^\lambda), \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

2.2 Variazione delle coordinate

Definizione 2.2 (Variazione delle coordinate)**.** Sia data (S, x) regolare di classe almeno C^2 ed una sua porzione Σ_Γ costruita come in precedenza. Definiamo *variazione delle coordinate* la famiglia $x_\lambda \colon D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$x_\lambda(u) = x(u) + \lambda h(u) N(u), \quad \forall u \in D, \tag{2.1}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$, $h \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria, ma fissata, di classe almeno C^2 tale che h è nulla sul bordo di Δ, e dove (ricordiamolo) $N(u)$ è il vettore normale unitario esterno di S. Poniamo $S_\lambda = x_\lambda(D)$.

(Questa è una delle tante possibili variazioni che potremmo costruire).

Osservazione 1. Data una superficie regolare (S, x) valgono le relazioni

$$\left\langle N(u), \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle N(u), \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = 0, \quad \forall u \in D,$$

e

$$\left\langle \frac{\partial N(u)}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle = -\left\langle N(u), \frac{\partial^2 x}{\partial u_j \partial u_i} \right\rangle = -b_{ij}. \tag{2.2}$$

Osservazione 2. Fissato un intorno compatto $\bar{\Delta}_1 \subset D$ di Δ tale che $\bar{\Delta} \subset \Delta_1$, si può sempre trovare $\varepsilon > 0$, dipendente da

$$\max_{u \in \bar{\Delta}_1} |h(u)| + \max_{u \in \bar{\Delta}_1} |\operatorname{grad} h(u)|,$$

in modo tale che le superfici (S_λ, x_λ) sono tutte regolari sopra Δ_1 per $|\lambda| < \varepsilon$.

Possiamo ora riscrivere la variazione delle coordinate (2.1) in termini dei coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

Proposizione 2.2.1. *Considerando la famiglia (2.1), la variazione delle coordinate si può esprimere in termini della prima forma fondamentale su* $S_\lambda = x_\lambda(D)$*:*

$$g_{ij}^\lambda = g_{ij} - 2\lambda h b_{ij} + \lambda^2 c_{ij}, \tag{2.3}$$

dove $|\lambda| < \varepsilon$ *(*ε *fissato come nell'Osservazione 2),* $h \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una fissata funzione arbitraria di classe almeno* C^2 *tale che essa è nulla sul bordo di* Δ *e dove le* c_{ij} *sono funzioni almeno continue su* D*.*

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_j} = \frac{\partial x}{\partial u_j} + \lambda \frac{\partial h}{\partial u_j} N(u) + \lambda h(u) \frac{\partial N}{\partial u_j}.$$

Considerato che

$$g_{ij}^\lambda = \left\langle \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i}, \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_j} \right\rangle,$$

abbiamo

$$g_{ij}^\lambda = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial u_i} N + \lambda h \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} + \lambda \frac{\partial h}{\partial u_j} N + \lambda h \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle =$$

$$= g_{ij} + \lambda \frac{\partial h}{\partial u_j} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, N \right\rangle + \lambda h \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle +$$

$$+\lambda \frac{\partial h}{\partial u_i} \left\langle N, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle + \lambda^2 \frac{\partial h}{\partial u_i} \frac{\partial h}{\partial u_j} \langle N, N \rangle + \lambda^2 h \frac{\partial h}{\partial u_i} \left\langle N, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle +$$

$$+\lambda h \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle + \lambda^2 h \frac{\partial h}{\partial u_j} \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, N \right\rangle + \lambda^2 h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle .$$

Considerando la (2.2) e le relazioni

$$\langle N, N \rangle = 1, \quad \left\langle N, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle = 0 = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, N \right\rangle ,$$

otteniamo

$$g_{ij}^{\lambda} = g_{ij} + \lambda h(-b_{ij} - b_{ij}) + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial u_i} \frac{\partial h}{\partial u_j} + h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle \right) =$$

$$= g_{ij} - 2\lambda h b_{ij} + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial u_i} \frac{\partial h}{\partial u_j} + h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle \right) .$$

□

Il ragionamento che stiamo seguendo è finalizzato a capire come descrivere la variazione delle aree relativamente alla variazione delle coordinate (2.1) imposta precedentemente per legare il tutto alla condizione $H = 0$.
Ponendo

$$G_{\lambda} = \begin{bmatrix} g_{11} - 2\lambda h b_{11} + \lambda^2 c_{11} & g_{12} - 2\lambda h b_{12} + \lambda^2 c_{12} \\ g_{12} - 2\lambda h b_{12} + \lambda^2 c_{12} & g_{22} - 2\lambda h b_{22} + \lambda^2 c_{22} \end{bmatrix},$$

ricordando che le aree di Σ_Γ e Σ_Γ^λ si scrivono come

$$\mathcal{A}(\Sigma_\Gamma) = \iint_\Delta \sqrt{\det(G)} \quad du_1 du_2, \quad \mathcal{A}(\Sigma_\Gamma^\lambda) = \iint_\Delta \sqrt{\det(G_\lambda)} \quad du_1 du_2,$$

usando la (2.3) calcoliamo lo sviluppo di Taylor del primo ordine del funzionale d'area in Σ_Γ rispetto a λ:

$$\mathcal{A}(\Sigma_\Gamma^\lambda) = \mathcal{A}(\Sigma_\Gamma) + \mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma)\lambda + O(\lambda^2).$$

Proposizione 2.2.2. *In virtù della (2.3) possiamo scrivere*

$$\det g_{ij}^\lambda = \det g_{ij} + a_1\lambda + a_2\lambda^2, \tag{2.4}$$

dove $|\lambda| < \varepsilon$, $a_1 = -2h(g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12})$ *e* a_2 *è una funzione almeno continua di* u_1 *e* u_2*.*

Dimostrazione. La prova è immediata. □

Calcoliamo ora la radice quadrata della (2.4)

$$\sqrt{\det g_{ij}^\lambda} = \sqrt{\det g_{ij} + a_1\lambda + a_2\lambda^2} = \sqrt{\det g_{ij} + (a_1\lambda + a_2\lambda^2)},$$

e prendiamo lo sviluppo di Taylor di ordine 1 in λ con punto iniziale $\lambda = 0$

$$\sqrt{\det g_{ij}^\lambda} = \sqrt{\det g_{ij}} + \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}a_1\lambda + O(\lambda^2).$$

Dunque c'è una costante $M > 0$ tale che

$$\left|\sqrt{\det g_{ij}^\lambda} - \left(\sqrt{\det g_{ij}} + \frac{a_1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\lambda\right)\right| < M\lambda^2, \quad \forall u \in D.$$

Integrando in $\Delta \subset D$ abbiamo

$$\left|\iint_\Delta \left[\sqrt{\det g_{ij}^\lambda} - \left(\sqrt{\det g_{ij}} + \frac{a_1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\lambda\right)\right] du_1du_2\right| =$$

$$= \left|\iint_\Delta \sqrt{\det g_{ij}^\lambda}\, du_1du_2 - \iint_\Delta \sqrt{\det g_{ij}}\, du_1du_2 - \lambda \iint_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\, du_1du_2\right| =$$

$$= \left|\mathcal{A}(\Sigma_\Gamma^\lambda) - \mathcal{A}(\Sigma_\Gamma) - \lambda \iint_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\, du_1du_2\right| < M_1\lambda^2.$$

Quindi

$$\mathcal{A}(\Sigma_\Gamma^\lambda) = \mathcal{A}(\Sigma_\Gamma) + \lambda \iint_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\, du_1du_2 + O(\lambda^2), \tag{2.5}$$

e dividendo per λ si ottiene

$$\left|\frac{\mathcal{A}(\tilde{\Sigma}_\Gamma) - \mathcal{A}(\Sigma_\Gamma)}{\lambda} - \iint_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\, du_1 du_2\right| < M_1|\lambda|.$$

Passando al limite per $\lambda \to 0$ si ottiene

$$\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = \iint_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\, du_1 du_2. \tag{2.6}$$

Proposizione 2.2.3. *Ricordando la definizione di curvatura media attraverso i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale (1.2) e la (2.6), si ha che la derivata del funzionale area fatta rispetto alla variazione in dipendenza da λ è*

$$\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = \iint_\Delta -2h(u)H(u)\sqrt{\det g_{ij}}\, du_1 du_2 \qquad \textit{(forma estesa)} \tag{2.7}$$

$$\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = -2\iint_{\Sigma_\Gamma} H\, d\mathcal{A} \qquad \textit{(forma contratta)} \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Esplicitiamo i termini della (2.6) e vediamo come giungere alla tesi utilizzando la definizione di a_1 nella relazione (2.4):

$$\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = \iint_\Delta \frac{-2h(u)(g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{21}b_{21})}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\, du_1 du_2.$$

È facile, razionalizzando tale equazione, individuare la definizione di curvatura media (1.2) ricavando così la forma estesa

$$\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = \iint_\Delta \frac{-2h(u)(g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{21}b_{21})}{2\det g_{ij}}\sqrt{\det g_{ij}}\, du_1 du_2 =$$

$$= \iint_\Delta -2h(u)H(u)\sqrt{\det g_{ij}}\, du_1 du_2.$$

Dall'impostazione del problema variazionale (2.1) ricordiamo che h è una funzione arbitrariamente fissata almeno C^2 definita in un intorno di $\bar{\Delta}$. Siamo allora autorizzati a scegliere la funzione costante $h \equiv 1$, ottenendo così la forma contratta

$$\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = -2\iint_{\Sigma_\Gamma} H\, d\mathcal{A}.$$

□

Lemma 2.2.4. *Una porzione Σ_Γ della superficie regolare (S, x) delimitata da una curva chiusa fissata Γ è un punto critico del funzionale d'area calcolato sulle variazioni Σ_Γ^λ, cioè vale*

$$\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = 0,$$

se e solo se Σ_Γ è una superficie minima, e dunque se e solo se $H(u) = 0$ per ogni $u \in \Delta$. In particolare, se Σ_Γ minimizza l'area, cioè

$$\mathcal{A}(\Sigma_\Gamma^\lambda) \geq \mathcal{A}(\Sigma_\Gamma), \quad \forall \lambda,\ |\lambda| < \varepsilon,$$

allora Σ_Γ deve essere una superficie minima.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = 0$ se e solo se $H \equiv 0$ su Δ. Usiamo la (2.8). Basterà dimostrare che $\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = 0 \Longrightarrow H \equiv 0$ su Δ. Supponiamo per assurdo che $H(u_0) \neq 0$ per qualche $u_0 \in \Delta$. Allora esiste un intorno connesso $I_0 \subset \bar{I}_0 \subset \Delta$ di u_0 tale che $H(u) \neq 0$ per ogni $u \in I_0$. Dato ora un intorno connesso I_1 di a tale che $I_1 \subset \bar{I}_1 \subset I_0$ consideriamo $\tilde{h} \in C^\infty(D)$ tale che

$$\begin{cases} 0 \leq \tilde{h} \leq 1 \\ \tilde{h}(u) = 1 & \forall u \in I_1 \\ \tilde{h}(u) = 0 & \forall u \in D \setminus I_0, \end{cases}$$

e poniamo $h(u) = H(u_0)\tilde{h}(u)$. Allora dalla forma estesa si ha che

$$\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = -\iint_\Delta 2\,\tilde{h}(u)\,H(u)^2 \sqrt{\det g_{ij}}\,du_1 du_2 \leq c_1 < 0.$$

Dunque ciò contraddice il fatto che Σ_Γ sia un punto critico del funzionale d'area rispetto alle variazioni $x_\lambda(u) = x(u) + \lambda h(u) N(u)$ con $|\lambda| < \varepsilon$ (dove $0 < \varepsilon$ è sufficientemente piccolo), e questo conclude la prova. $\square$

Capitolo 3

Superfici minime: caso di un grafico

In questo capitolo daremo la definizione di superficie minima quando S è data in forma di grafico e ricaveremo la forma che il relativo problema variazionale assume.

3.1 Definizione

Definizione 3.1 (Superficie minima: caso di grafico)**.** Sia data una superficie (S, x) in forma di x_3-grafico (vedi Definizione 1.11) $x\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \longmapsto x(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3 = f(x_1, x_2))$.
Sappiamo che S è una superficie minima se la curvatura media H si annulla in ogni punto, cioè:

$$H(x_1, x_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in D.$$

Con una semplice sostituzione esplicitiamo i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale ottenendo così un'altra condizione equivalente che coinvolge solo la funzione f,

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Per semplificare tale relazione e i conti che seguiranno, poniamo

$$p = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad pq = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Possiamo dunque concludere che una superficie (S, x) in forma di x_3-grafico è minima se la funzione f che determina univocamente la terza coordinata verifica la seguente equazione in p e q:

$$(1+q^2)\frac{\partial p}{\partial x_1} + (1+p^2)\frac{\partial q}{\partial x_2} - pq\left(\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial q}{\partial x_1}\right) = 0. \tag{3.1}$$

È utile anche riscrivere i coefficienti della prima forma fondamentale

$$g_{11} = 1 + p^2, \quad g_{12} = g_{21} = pq, \quad g_{22} = 1 + q^2,$$

per cui

$$\det g_{ij} = \det \begin{bmatrix} 1+p^2 & pq \\ pq & 1+q^2 \end{bmatrix} = 1 + p^2 + q^2.$$

3.2 Variazione ortogonale al piano x_1, x_2

Definizione 3.2 (Variazione ortogonale al piano x_1, x_2)**.** Sia data la superficie (S, x) in forma di grafico, e sia Σ_Γ la porzione di superficie regolare di S avente come bordo la curva chiusa Γ, come in precedenza: $x(\Delta) = \Sigma_\Gamma$, $x(\partial\Delta) = \Gamma$. Consideriamo la famiglia di superfici (S_λ, x_λ) che fissano Γ variandone la superficie parametrizzate da $x_\lambda \colon \Delta \subset D \longrightarrow \Sigma_\Gamma^\lambda \subset S_\lambda \subset \mathbb{R}^3$, $x_\lambda(x_1, x_2) = x(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2) N_0(x_1, x_2)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, h funzione arbitraria C^1 fissata definita sul dominio Δ tale che $h|_{\partial\Delta} \equiv 0$, e dove $N_0(x_1, x_2) = (0, 0, 1)^t$. Dunque la *variazione ortogonale al piano delle* x_1, x_2 è la famiglia:

$$x_\lambda = x(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2) N_0(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Possiamo considerare solo la terza coordinata, senza perdere in generalità:

$$f_\lambda = f + \lambda h. \tag{3.2}$$

(Anche questa è una delle tante variazioni possibili).
Di conseguenza, semplifichiamo lo studio del problema variazionale introducendo anche qui le variabili p_λ e q_λ:

$$p_\lambda = \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} = p + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1}, \quad q_\lambda = \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2} = q + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2}, \quad p_\lambda q_\lambda = \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2}.$$

I coefficienti della prima forma fondamentale diventano:

$$g_{11}^\lambda = 1 + p_\lambda^2, \quad g_{22}^\lambda = 1 + q_\lambda^2, \quad g_{12}^\lambda = g_{21}^\lambda = p_\lambda q_\lambda,$$

e il corrispettivo determinante

$$\det g_{ij}^\lambda = \det \begin{bmatrix} 1 + p_\lambda^2 & p_\lambda q_\lambda \\ p_\lambda q_\lambda & 1 + q_\lambda^2 \end{bmatrix} = (1 + p_\lambda^2)(1 + q_\lambda^2) - (p_\lambda q_\lambda)^2.$$

Il nostro obiettivo ora è capire come in questo caso la variazione (3.2) si ripercuote nel calcolo delle aree.

Proposizione 3.2.1. *A partire dalla (3.2) si deduce la relazione che lega i determinanti delle matrici dei coefficienti di Gauss $\{g_{ij}^\lambda\}_{i,j=1,2}$ e $\{g_{ij}\}_{i,j=1,2}$:*

$$\det g_{ij}^\lambda = \det g_{ij} + 2\lambda \mathrm{X} + \lambda^2 \mathrm{Y}, \tag{3.3}$$

dove

$$\mathrm{X} = \big[(1 + q^2)p - (pq)q\big] \frac{\partial h}{\partial x_1} + \big[(1 + p^2)q - (pq)p\big] \frac{\partial h}{\partial x_2}, \tag{3.4}$$
$$\mathrm{Y} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}.$$

Dimostrazione.

$$\det g_{ij}^\lambda = (1 + p_\lambda^2)(1 + q_\lambda^2) - (p_\lambda q_\lambda)^2 =$$

$$= \left[1 + \left(p^2 + \lambda 2p \frac{\partial h}{\partial x_1} + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\right)\right] \left[1 + \left(q^2 + \lambda 2q \frac{\partial h}{\partial x_2} + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2\right)\right] -$$

$$-(pq)^2 - \lambda 2p^2q\frac{\partial h}{\partial x_2} - \lambda^2p^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 - \lambda 2pq^2\frac{\partial h}{\partial x_1} - \lambda^3 2p\frac{\partial h}{\partial x_1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 -$$

$$-\lambda^2 4pq\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} - \lambda^2q^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 - \lambda^3 2q\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial x_2} - \lambda^4\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 =$$

$$= 1 + q^2 + \lambda 2q\frac{\partial h}{\partial x_2} + \lambda^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + p^2 + p^2q^2 + \lambda 2p^2q\frac{\partial h}{\partial x_2} + \lambda^2p^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 +$$

$$+\lambda 2p\frac{\partial h}{\partial x_1} + \lambda 2pq^2\frac{\partial h}{\partial x_1} + \lambda^2 4pq\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} + \lambda^3 2p\frac{\partial h}{\partial x_1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 +$$

$$+\lambda^2q^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \lambda^3 2q\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial x_2} + \lambda^4\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 -$$

$$-(pq)^2 - \lambda 2p^2q\frac{\partial h}{\partial x_2} - \lambda^2p^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 - \lambda 2pq^2\frac{\partial h}{\partial x_1} - \lambda^3 2p\frac{\partial h}{\partial x_1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 -$$

$$-\lambda^2 4pq\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} - \lambda^2q^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 - \lambda^3 2q\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial x_2} - \lambda^4\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 =$$

$$= 1 + q^2 + p^2 + p^2q^2 - (pq)^2 +$$

$$+2\lambda\left[q\frac{\partial h}{\partial x_2} + p^2q\frac{\partial h}{\partial x_2} + p\frac{\partial h}{\partial x_1} + pq^2\frac{\partial h}{\partial x_1} - p^2q\frac{\partial h}{\partial x_2} - pq^2\frac{\partial h}{\partial x_1}\right] +$$

$$+\lambda^2\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + p^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + 4pq\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + q^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\right] +$$

$$+\lambda^2\left[-p^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2-4pq\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2}-q^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\right]+$$

$$+\lambda^3\left[2p\frac{\partial h}{\partial x_1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2+2q\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial x_2}-2p\frac{\partial h}{\partial x_1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2-2q\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial x_2}\right]+$$

$$+\lambda^4\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2-\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2\right].$$

I coefficienti di λ^3 e λ^4 si annullano, i termini non moltiplicati per λ compongono $\det g_{ij} = 1+p^2+q^2+p^2q^2-(pq)^2$, il coefficiente di λ^2 determina la Y e il coefficiente di 2λ la X:

$$\begin{aligned}\mathrm{X} &= (-pq^2+q+pq^2)\frac{\partial h}{\partial x_1}+(-pq^2+q+p^2q)\frac{\partial h}{\partial x_2}= \\ &= \left((1+q^2)p-(pq)q\right)\frac{\partial h}{\partial x_1}+\left((1+p^2)q-(pq)p\right)\frac{\partial h}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

□

Calcoliamo ora la radice quadrata della (3.3)

$$\sqrt{\det g_{ij}^{\lambda}} = \sqrt{\det g_{ij}+2\lambda\mathrm{X}+\lambda^2\mathrm{Y}}$$

e scriviamo il relativo polinomio di Taylor del primo ordine in $\lambda = 0$:

$$\sqrt{\det g_{ij}^{\lambda}} = \sqrt{\det g_{ij}}+\frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}2\mathrm{X}\lambda+O(\lambda^2).$$

Si ha dunque la seguente relazione (con Z funzione continua):

$$\sqrt{\det g_{ij}^{\lambda}} = \sqrt{\det g_{ij}}+\lambda\frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\det g_{ij}}}+\lambda^2\mathrm{Z}. \tag{3.5}$$

Teorema 3.2.2. *Una porzione Σ_Γ della superficie regolare (S, x) data in forma di x_3-grafico e delimitata da una curva regolare fissata Γ di classe C^1, chiusa e semplice, è un punto critico del funzionale d'area calcolato sulle variazioni Σ_Γ^λ ortogonali al piano x_1, x_2, cioè vale*

$$\mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma) = \iint_\Delta \frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\det g_{ij}}}\,dx_1dx_2 = 0, \tag{3.6}$$

se e solo se Σ_Γ è una superficie minima, e dunque se e solo se $H = 0$ per ogni $(x_1, x_2) \in \Delta$. In particolare se Σ_Γ minimizza l'area della famiglia Σ_Γ^λ, cioè

$$\mathcal{A}(\Sigma_\Gamma^\lambda) \geq \mathcal{A}(\Sigma_\Gamma), \quad \forall\lambda,\ |\lambda| < \varepsilon,$$

allora Σ_Γ deve essere una superficie minima.
La condizione (3.6) è equivalente alla condizione

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{(1+q^2)p-(pq)q}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{(1+p^2)q-(pq)p}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right)=0, \quad \forall(x_1,x_2)\in\Delta. \tag{3.7}$$

Dimostrazione. Integriamo la (3.5) su Δ, dominio di definizione delle aree,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Sigma_\Gamma^\lambda) &= \iint_\Delta \sqrt{\det g_{ij}^\lambda}\, dx_1 dx_2 = \\ &= \iint_\Delta \left(\sqrt{\det g_{ij}} + \lambda\frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\det g_{ij}}} + \lambda^2 \mathrm{Z}\right) dx_1 dx_2 = \\ &= \mathcal{A}(\Sigma_\Gamma) + \mathcal{A}'(\Sigma_\Gamma)\lambda + O(\lambda^2),\end{aligned}$$

per tutti i λ sufficientemente piccoli. Come prima si ottiene allora

$$\iint_\Delta \frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\det g_{ij}}}\, dx_1 dx_2 = 0.$$

Ora dimostriamo che la (3.6) è equivalente alla (3.7), e che a sua volta (3.7) è equivalente alla condizione di superficie minima.
Riprendiamo la definizione di X in (3.4),

$$\mathrm{X} = [(1+q^2)p-(pq)q]\frac{\partial h}{\partial x_1} + [(1+p^2)q-(pq)p]\frac{\partial h}{\partial x_2},$$

e sostituiamola nella (3.6) ottenendo

$$\iint_\Delta \left[\frac{(1+q^2)p-(pq)q}{\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{(1+p^2)q-(pq)p}{\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial h}{\partial x_2}\right] dx_1 dx_2 = 0.$$

Chiamiamo $f_1 = \frac{(1+q^2)p-(pq)q}{\sqrt{\det g_{ij}}}$ e $f_2 = \frac{(1+p^2)q-(pq)p}{\sqrt{\det g_{ij}}}$. Allora certamente vale la relazione

$$f_1\frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2\frac{\partial h}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}h - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}h + \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1 h) + \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2 h).$$

Integriamo tutto su Δ. Poiché $h \equiv 0$ sul bordo $\partial\Delta$ di Δ, si ha

$$\iint_\Delta \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(f_1 h) + \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2 h)\right] dx_1 dx_2 = 0.$$

La relazione considerata diventa allora

$$\iint_\Delta \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{(1+q^2)p-(pq)q}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{(1+p^2)q-(pq)p}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right)\right] h\, dx_1 dx_2 = 0,$$

da cui l'equivalenza di (3.6) e (3.7) per l'arbitrarietà di h.

Sviluppiamo ora la (3.7) ottenendo

$$(3.7) = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\Big((1+q^2)p'_{x_1} - pq(q'_{x_1} + p'_{x_2}) + (1+p^2)q'_{x_2}\Big) +$$

$$+ \underbrace{p\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+q^2}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{pq}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right)\Big]}_{=:A} +$$

$$+ \underbrace{q\Big[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1+p^2}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{pq}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right)\Big]}_{=:B}.$$

Poiché, come si calcola,

$$A = -\frac{p^2}{(\det g_{ij})^{3/2}}\Big((1+q^2)p'_{x_1} + (1+p^2)q'_{x_2} - pq(q'_{x_1} + p'_{x_2})\Big),$$

$$B = -\frac{q^2}{(\det g_{ij})^{3/2}}\Big((1+q^2)p'_{x_1} + (1+p^2)q'_{x_2} - pq(q'_{x_1} + p'_{x_2})\Big),$$

si ottiene

$$(3.7) = \Big(\frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} - \frac{p^2+q^2}{(\det g_{ij})^{3/2}}\Big)\Big((1+q^2)p'_{x_1} + (1+p^2)q'_{x_2} - pq(q'_{x_1} + p'_{x_2})\Big) =$$

$$= \frac{1}{(\det g_{ij})^{3/2}}\Big((1+q^2)p'_{x_1} + (1+p^2)q'_{x_2} - pq(q'_{x_1} + p'_{x_2})\Big),$$

da cui le equivalenze volute.

$\square$

Per concludere il capitolo diamo una conseguenza diretta della prova del teorema appena enunciato.

Corollario 3.2.3. *Tutte le f che descrivono in forma di x_3-grafico le superfici le cui porzioni Σ_Γ (date come nel precedente teorema) sono superfici minime, debbono soddisfare per ogni $(x_1, x_2) \in \Delta$ il sistema di equazioni alle derivate parziali in forma di divergenza*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{1+q^2}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{pq}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{pq}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{1+p^2}{\sqrt{\det g_{ij}}}\right) \end{cases}.$$

Capitolo 4

Esempi

Date le parametrizzazioni di un'elicoide retta e di una catenoide, calcoliamo la curvatura media e verifichiamo che essa si annulla, dimostrando così che le suddette superfici sono minime.

4.1 Elicoide

L'elicoide è la superficie definita dalla parametrizzazione $x\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $u \longmapsto (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, au_2)$ con $a > 0$. Si ha immediatamente che (S, x) è regolare. Verifichiamo che $H(u) = 0$ per ogni $u \in D$.

1. Calcoliamo le derivate parziali di x, cioè i vettori che compongono la base dello spazio tangente:
   $$\frac{\partial x}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} \cos u_2 \\ \sin u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} -u_1 \sin u_2 \\ u_1 \cos u_2 \\ a \end{pmatrix}.$$

2. Calcoliamo il vettore normale unitario esterno N

$$N = N_x(u) = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial x}{\partial u_2}}{\left\| \dfrac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \right\|}.$$ Si ha

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos u_2 & \sin u_2 & 0 \\ -u_1 \sin u_2 & u_1 \cos u_2 & a \end{bmatrix} =$$

$$= i(a \sin u_2) - j(a \cos u_2) + k(u_1 \cos^2 u_2 + u_1 \sin^2 u_2) = (a \sin u_2, -a \cos u_2, u_1)^t,$$

con norma

$$\|(a \sin u_2, -a \cos u_2, u_1 \cos^2 u_2 + u_1 \sin^2 u_2)^t\| = \sqrt{a^2 + u_1^2}.$$

Dunque

$$N = \frac{(a \sin u_2, -a \cos u_2, u_1)^t}{\sqrt{a^2 + u_1^2}}.$$

3. Calcoliamo i coefficienti della prima forma fondamentale:

$$g_{11} = \left\| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\|^2 = \|(\cos u_2, \sin u_2, 0)^t\|^2 = 1,$$

$$g_{22} = \left\| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\|^2 = \|(-u_1 \sin u_2, u_1 \cos u_2, a)^t\|^2 = a^2 + u_1^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = -u_1 \cos u_2 \sin u_2 + u_1 \cos u_2 \sin u_2 = 0.$$

4. Calcoliamo i coefficienti della seconda forma fondamentale:

$$b_{11} = \left\langle N, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + u_1^2}} \left\langle (a \sin u_2, -a \cos u_2, u_1)^t, (\cos u_2, \sin u_2, 0)^t \right\rangle = 0$$

$$b_{22} = \left\langle N, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + u_1^2}} \left\langle (a \sin u_2, -a \cos u_2, u_1)^t, (-u_1 \sin u_2, u_1 \cos u_2, a)^t \right\rangle = 0$$

$$b_{12} = b_{21} = \left\langle N, \frac{\partial x}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + u_1^2}} \left\langle (a \sin u_2, -a \cos u_2, u_1)^t, (-\sin u_2, \cos u_2, 0)^t \right\rangle = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + u_1^2}}$$

È immediato ora concludere che $H(u) = 0$ per ogni $u \in D$: basta sostituire i coefficienti trovati alla formula (1.2).

4.2 Catenoide

La catenoide è la superficie regolare ottenuta dalla rotazione di un arco di catenaria attorno all'asse x_3. La sua forma parametrica è data da $x \colon \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $u \longmapsto (a \cosh u_1 \cos u_2, a \cosh u_1 \sin u_2, u_1)$, dove $a > 0$. Per semplicità poniamo $a = 1$. Verifichiamo che $H(u) = 0$ per ogni $u \in D$.

1. Calcoliamo le derivate parziali di x, cioè i vettori che compongono la base dello spazio tangente:
$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} \sinh u_1 \cos u_2 \\ \sinh u_1 \sin u_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} -\cosh u_1 \sin u_2 \\ \cosh u_1 \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Calcoliamo il vettore normale unitario esterno N
$N = N_x(u) = \dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial x}{\partial u_2}}{\left\| \dfrac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \right\|}$. Si ha

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \sinh u_1 \cos u_2 & \sinh u_1 \sin u_2 & 1 \\ -\cosh u_1 \sin u_2 & \cosh u_1 \cos u_2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= i(-\cosh u_1 \cos u_2) - j(\cosh u_1 \sin u_2) +$$

$$+k(\cosh u_1 \sinh u_1 \cos^2 u_2 + \cosh u_1 \sinh u_1 \sin^2 u_2) =$$

$$= (-\cosh u_1 \cos u_2, -\cosh u_1 \sin u_2, \cosh u_1 \sinh u_1)^t,$$

con norma

$$\|(-\cosh u_1 \cos u_2, -\cosh u_1 \sin u_2, \cosh u_1 \sinh u_1)^t\| = \cosh^2 u_1.$$

Dunque

$$N = \frac{(-\cosh u_1 \cos u_2, -\cosh u_1 \sin u_2, \cosh u_1 \sinh u_1)^t}{\cosh^2 u_1} =$$

$$= (-\frac{\cos u_2}{\cosh u_1}, -\frac{\sin u_2}{\cosh u_1}, \tanh u_1)^t.$$

3. Calcoliamo i coefficienti della prima forma fondamentale:

$$g_{11} = \left\| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\|^2 = \|(\sinh u_1 \cos u_2, \sinh u_1 \sin u_2, 1)^t\|^2 = \sinh^2 u_1 \cos^2 u_2 +$$

$$+ \sinh^2 u_1 \sin^2 u_2 + 1 = \sinh^2 u_1 + 1 = \cosh^2 u_1,$$

$$g_{22} = \left\| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\|^2 = \|(-\cosh u_1 \sin u_2, \cosh u_1 \cos u_2, 0)^t\|^2 = \cosh^2 u_1,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle =$$

$$= -\cosh u_1 \sinh u_1 \cos u_2 \sin u_2 + \cosh u_1 \sinh u_1 \cos u_2 \sin u_2 = 0.$$

4. Calcoliamo i coefficienti della seconda forma fondamentale:

$$b_{11} = \left\langle N, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(-\frac{\cos u_2}{\cosh u_1}, -\frac{\sin u_2}{\cosh u_1}, \tanh u_1 \right)^t, (\sinh u_1 \cos u_2, \sinh u_1 \sin u_2, 1)^t \right\rangle = 0,$$

$$b_{22} = \left\langle N, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(-\frac{\cos u_2}{\cosh u_1}, -\frac{\sin u_2}{\cosh u_1}, \tanh u_1 \right)^t, (-\cosh u_1 \sin u_2, \cosh u_1 \cos u_2, 0)^t \right\rangle = 0,$$

$$b_{12} = b_{21} = \left\langle N, \frac{\partial x}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(-\frac{\cos u_2}{\cosh u_1}, -\frac{\sin u_2}{\cosh u_1}, \tanh u_1 \right)^t, (-\sinh u_1 \sin u_2, \sinh u_1 \cos u_2, 0)^t \right\rangle = 0.$$

Dalla (1.2) è ora immediato concludere che $H(u) = 0$ per ogni $u \in D$.

Bibliografia

[1] Manfredo P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New Jersey, Prentice Hall, 1976.

[2] Robert Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand Reinhold Company, 1969.

[3] Dirk J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry* - Second edition , Dover Publications, 1988.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare prima di tutto il professor Alberto Parmeggiani, per i preziosi insegnamenti, per le numerose ore dedicate alla mia tesi, per essere stato sempre disponibile a dirimere i miei dubbi durante la stesura di questo lavoro. Lo ringrazio per aver tentato di insegnarmi come svolgere al meglio il lavoro da matematica professionista. Non capita spesso poter lavorare con professori tanto appassionati alla loro materia quanto all' insegnamento. Grazie di cuore.
Un ringraziamento particolare va rivolto alla mia famiglia. Grazie per aver creduto in me sempre, per avermi finanziata, ma soprattutto per l'incoraggiamento costante in questi duri tre anni di continue sfide tra esami, traslochi, trasferimenti... Grazie per non avermi permesso di abbandonare il mio sogno. Se ora posso ancora aspirare a lavorare nelle scuole con tanti ragazzi è anche grazie a voi.
Grazie Mamma per i tuoi consigli diretti, per avermi aiutata ad organizzarmi al meglio, per aver insistito a tornare più spesso a casa e soprattutto grazie per avermi comprato sempre nuovi vestiti senza pretendere la mia presenza.
Grazie Babbone per le tue telefonate appena uscito da lavoro, per le tue raccomandazioni di andare a dormire presto e soprattutto grazie per avermi regalato il maggiolone rosso che è stato sempre al mio fianco a ricordarmi il mio obiettivo.
Grazie Meri per essermi stata sempre vicina anche quando non ci sentivamo per giorni, la magia dei gemelli è proprio quella di sentirsi sempre vicini pur stando lontani, e grazie per avermi fatto trovare la camera in ordine ogni

volta che tornavo (anche se con un buga buga!).
Grazie Fili per aver avuto la pazienza di sopportare una sorella che per tre anni è stata tre giorni a casa con te e tre settimane lontana, grazie per aver accettato questa ingiustizia.

Un ringraziamento particolare a nonna Mariola, per le sue intense preghiere prima degli esami, le sue tisane, le sue raccomandazioni e le sue chiamate puntuali a fine esame per sapere come era andata. Grazie anche a nonna Fu e nonno Marino che si sono sempre interessati a sapere come andavano gli esami, quando tornavo e soprattutto se mangiavo.

Inoltre vorrei ringraziare tutta la mia numerosa famiglia. Grazie a tutti gli zii e le zie che si sono sempre interessati a me anche se ci siamo visti poco, grazie a tutti per avermi chiamato ogni volta che eravate nella mia stessa città, chi per un saluto, chi per uscire insieme, chi per offrirmi una cena.Grazie.
Un grazie lo devo anche a tutti i miei cuginetti piccoli e grandi, che nonostante le mie lunghe assenze, non si sono dimenticati di me e ogni volta che li vedo mi dimostrano che mi vogliono sempre bene.
Grazie di cuore a Danilo, Grazia, Flavia e Ludo, a Clementina, Cesare e Erica per essere stati la mia seconda famiglia nei due anni a Roma. Siete stati un importante punto di riferimento e di sostegno per me. Lo continuerete ad essere anche se ora ci separano più chilometri.

Grazie ai miei amici di Jesi che anche se sono mancata per lunghi periodi, al mio ritorno sono sempre stati pronti ad uscire e festeggiare.

Un grazie particolare devo rivolgerlo a Giulia Gaspa, a Francesca Mastro e ad Allegra, che sono state amabili coinquiline e amiche, sempre presenti e disponibili a sopportarmi. Ma un ringraziamento speciale va a Giusy, una fantastica amica, che mi ha supportata ogni giorno pian piano che si avvicinava la mia laurea (non ci posso crèdere!).

Un grazie a tutte le persone che ho conosciuto qua a Bologna che hanno reso la mia vita bolognese così fantastica e divertente.

Infine lasciatemi ringraziare Stè, per aver sempre creduto in me, per essermi stato vicino e per tutte le belle serate passate insieme.